Kontrolltöö lahendused

Diskreetsed struktuurid

1. variant

Ülesanne 1. 15 inimese hulgas on A ja B omavahel sõbrad ning C ja D omavahel vaenlased. Mitmel viisil saab need inimesed jaotada 5 ühesuuruseks rühmaks nii, et sõbrad kuuluksid samasse rühma, aga vaenlased erinevatesse rühmadesse? Rühmade järjekord oluline ei ole.

Lahendus. Iga rühm peab sisaldama 3 inimest. Paigutame A ja B esimesse rühma. Kui selle rühma kolmas liige on C, siis tuleb ülejäänud 12 inimest jaotada 4 ühesuuruseks rühmaks, ülesande tingimused saavad sellega täidetud. Eeldame esialgu, et nende 4 rühma järjekord on oluline. Valime 3 inimest esimesse rühma, selleks on $\binom{12}{3}$ võimalust. Ülejäänud 9 inimesest valime 3 inimest teise rühma, milleks on $\binom{9}{3}$ võimalust. Lõpuks valime 6 inimesest 3, kes moodustavad kolmanda rühma, selleks on $\binom{6}{3}$ võimalust. Sellega on rühmade koosseisud määratud. Üldse on võimalusi seega $\binom{12}{3} \cdot \binom{9}{3} \cdot \binom{6}{3}$. Et aga tegelikult nende 4 rühma omavaheline järjekord oluline ei ole, siis on jaotusvõimalusi

$$\frac{1}{4!} \cdot \binom{12}{3} \cdot \binom{9}{3} \cdot \binom{6}{3} = 15400.$$

Kui inimestega A ja B samasse rühma kuulub D, siis on võimalusi samuti 15400.

Kui inimestega A ja B samasse rühma ei kuulu C ega D, siis selle rühma kolmanda liikme valimiseks järelejäänute hulgast on 11 võimalust. Seejärel inimesele C kahe paarilise valimiseks on $\binom{10}{2}$ võimalust (keelatud on lisaks kolmele esimese rühma liikmele veel C ja D), edasi inimesele D kahe paarilise valimiseks on $\binom{8}{2}$ võimalust (keelatud on kahe eelmise rühma liikmed ja D). Ülejäänud 6 inimesest tuleb moodustada 2 rühma. Valime 6 inimesest 3, milleks on $\binom{6}{3}$ võimalust, ning et rühmade järjekord pole oluline, jagame tulemust veel arvuga 2!. Kokku on võimalusi

$$11 \cdot \binom{10}{2} \cdot \binom{8}{2} \cdot \frac{1}{2!} \cdot \binom{6}{3} = 138600.$$

Vaadeldud kolm juhtu on üksteist välistavad ja katavad kõik variandid, liitmisreegli põhjal on võimaluste arv seega $15400 + 15400 + 138600 = 169400$.

Märkus. Rühmade järjekorra muutumist on vaja arvestada ainult nende rühmade puhul, mis saavad moodustamisprotsessis tekkida mitmel erineval sammul. Näiteks rühm, mis sisaldab inimesi A ja B, saab tekkida ainult esimesel sammul, seetõttu ei ole vaja võtta arvesse (hüpoteetilist) juhtu, kus see rühm tekib nt neljandal sammul. Teiste sõnadega, järjekorra muutumist pole vaja arvestada nende rühmade puhul, mida me saame ise juba eelnevalt mingi tunnuse alusel järjestada.

Materjal õpikus. Lk 14 (kombinatsioonid). Lk 19 (korrutamis- ja liitmisreegel). Lk 21, ülesanded 16, 17. Lk 22, ülesanded 21–23.

Ülesanne 2. Þingivi keeles on 1 ühetäheline ja 1 kahetäheline sõna. Igast sõnast pikkusega n on võimalik ühe tähe juurdekirjutamisega saada 2 sõna pikkusega $n+1$ ning igast sõnast pikkusega $n-1$ on võimalik kahe tähe juurdekirjutamisega saada 8 sõna pikkusega $n+1$. Kõik saadavad sõnad on erinevad ja rohkem sõnu pikkusega $n+1$ ei ole. Leida avaldis, millest on võimalik ainult naturaalarvu n järgi välja arvutada, mitu sõna pikkusega n keeles leidub.

Lahendus. Olgu A_n kõigi n-täheliste sõnade arv. Ülesande tingimuste põhjal kehtib seos

$$A_{n+1} = 2A_n + 8A_{n-1}.$$

Algtingimused on $A_1 = 1$, $A_2 = 1$.

Karakteristliku võrrandi $q^2 - 2q - 8 = 0$ lahendid on $q_1 = 4$, $q_2 = -2$. Järelikult rekurrentse võrrandi üldlahend on

$$A_n = c_1 \cdot 4^n + c_2 \cdot (-2)^n.$$

Algtingimuste põhjal saame võrrandisüsteemi

$$\begin{aligned} 4c_1 - 2c_2 &= 1 \\ 16c_1 + 4c_2 &= 1, \end{aligned}$$

mille lahendid on $c_1 = \frac{1}{8}$, $c_2 = -\frac{1}{4}$. Kõigi n-täheliste sõnade arv on seega

$$A_n = \frac{1}{8} \cdot 4^n - \frac{1}{4} \cdot (-2)^n.$$

Materjal õpikus. Lk 36–40 (teist järku rekurrentsete võrrandite lahendamine).

Ülesanne 3. Teha kindlaks, kas järgmiste naabrusmaatriksitega antud graafid on isomorfsed. Jaatava vastuse korral kirjutada välja isomorfism, eitava vastuse korral põhjendada.

$$G = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad H = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Lahendus. Joonistades välja graafide täiendid, leiame, et graafi G täiend on tsükkel tippudega 1, 4, 5, 3, 2, 6 ning graafi H täiend on tsükkel tippudega 1, 2, 5, 4, 3, 6. Et kaks sama tippude arvuga tsüklit on isomorfsed, siis on ka graafid G ja H isomorfsed. Üks isomorfism on näiteks bijektsioon φ, mis teisendab graafi G tipud graafi H tippudeks järgmisel viisil: $\varphi(1) = 1$, $\varphi(2) = 3$, $\varphi(3) = 4$, $\varphi(4) = 2$, $\varphi(5) = 5$, $\varphi(6) = 6$.

Materjal õpikus. Lk 57–59 (graafide isomorfism). Lk 62, ülesanded 37–41.

Ülesanne 4. Mitu serva peab 9-tipulisel graafil vähemalt olema, et selles graafis kindlasti ei leiduks sildu?

Lahendus. Oletame, et graafis leidub sild ja uurime, milline saab olla sel juhul graafi suurim servade arv. Sild peab ühendama kahte komponenti, mis selleks, et servade arv oleks suurim, peavad eraldi võetuna olema täisgraafid. Teame, et n-tipulise täisgraafi servade arv on $\frac{n(n-1)}{2}$.

9-tipulise graafi tipud võivad jaguneda kas $(1, 8)$, $(2, 7)$, $(3, 6)$ või $(4, 5)$. Esimesel juhul on graafi maksimaalne servade arv $1 + 0 + \frac{8\cdot 7}{2} = 29$, teisel juhul $1 + 1 + \frac{7\cdot 6}{2} = 23$, kolmandal juhul $1 + 3 + \frac{6\cdot 5}{2} = 19$ ja neljandal juhul $1 + \frac{4\cdot 3}{2} + \frac{5\cdot 4}{2} = 17$. Seega kui 9-tipulisel graafil on rohkem kui 29 serva, st vähemalt 30 serva, siis ei saa selline graaf sisaldada ühtegi silda.

Materjal õpikus. Lk 53–55 (sidusus).

Ülesanne 5. Teha kindlaks, kas järgmine positiivsete reaalarvude hulgal määratud relatsioon

$$\mathcal{R} = \{(x, y) : \frac{x^2}{y^2} = \frac{y}{x}\}$$

on ekvivalents.

Lahendus. Võrdus $\frac{x^2}{y^2} = \frac{y}{x}$ on samaväärne võrdusega $x^3 = y^3$, sest põhihulga elemendid on positiivsed reaalarvud. Järelikult võib relatsiooni esitada kujul

$$\mathcal{R} = \{(x, y) : x^3 = y^3\}.$$

Kontrollime ekvivalentsi omaduste kehtivust.

- Relatsioon on refleksiivne, sest iga positiivse reaalarvu x korral kehtib $x^3 = x^3$, st $(x, x) \in \mathcal{R}$.
- Relatsioon on sümmeetriline, sest kui $x^3 = y^3$, siis ka $y^3 = x^3$, st kui $(x, y) \in \mathcal{R}$, siis ka $(y, x) \in \mathcal{R}$.
- Relatsioon on transitiivne, sest kui $x^3 = y^3$ ja $y^3 = z^3$, $x^3 = z^3$, st kui $(x, y) \in \mathcal{R}$ ja $(y, z) \in \mathcal{R}$, siis ka $(x, z) \in \mathcal{R}$.

Seega see relatsioon on ekvivalents.

Materjal õpikus. Lk 90–92 (ekvivalentsirelatsioon). Lk 94–95, ülesanded 5–10, 19–24.

Kontrolltöö lahendused

Diskreetsed struktuurid

2. variant

Ülesanne 1. Raamat *Mittediskreetne matemaatika* koosneb 4-st peatükist, igaühes 7 teoreemi. Eksamiülesannete komplekt peab sisaldama 10 teoreemi tõestust, sealjuures igast peatükist vähemalt 2. Mitu võimalust on koostada nendele tingimustele vastav teoreemide tõestustest koosnev eksamikomplekt aines *Mittediskreetne matemaatika*?

Lahendus. Kui komplekt sisaldab 4 teoreemi ühest peatükist ja ülejäänutest igaühest 2, siis selle peatüki valikuks, millest võetakse 4 teoreemi, on 4 võimalust ja teoreemide endi valikuks $\binom{7}{4}$ võimalust. Kolmest ülejäänud peatükist on igaühe puhul kahe teoreemi valimiseks $\binom{7}{2}$ võimalust. Et kõigil sammudel on valikuvõimaluste arvud üksteisest sõltumatud, siis korrutamisreegli põhjal saab niisuguseid eksamikomplekte koostada $4 \cdot \binom{7}{4} \cdot \binom{7}{2}^3 = 1296540$ tükki.

Kui komplekt sisaldab kahest peatükist kummastki 3 teoreemi ja ülejäänud kahest kummastki 2 teoreemi, siis nende peatükkide valikuks, millest võetakse 3 teoreemi, on $\binom{4}{2}$ võimalust. Teoreemide endi valikuks on 3 valitava teoreemiga peatükkide puhul $\binom{7}{3}$ võimalust, 2 valitava teoreemiga peatükkide puhul aga $\binom{7}{2}$ võimalust. Siin on võimalikke eksamikomplekte seega $\binom{4}{2} \cdot \binom{7}{3}^2 \cdot \binom{7}{2}^2 = 3241350$.

Sellega on kõik teoreemide valikuviisid ammendatud, võimalusi on kokku $1296540 + 3241350 = 4537890$.

Materjal õpikus. Lk 14 (kombinatsioonid). Lk 19 (korrutamis- ja liitmisreegel). Lk 22, ülesanded 21–23. Lk 21, ülesanne 15.

Ülesanne 2. Teatav algoritm kulutab sisendandmete mahu n korral ülesande lahendamiseks kaks korda nii palju aega kui sisendandmete mahu $n-1$ korral pluss veel kolm korda nii palju aega kui mahu $n-2$ korral. Leida avaldis, millest on võimalik ainult naturaalarvu n järgi välja arvutada algoritmi tööaeg sisendandmete mahu n korral, kui mahu 0 korral on tööaeg 1 ajaühik ja mahu 1 korral 2 ühikut.

Lahendus. Olgu A_n algoritmi tööaeg sisendandmete mahu n korral. Ülesande tingimuste põhjal kehtib seos

$$A_n = 2A_{n-1} + 3A_{n-2}.$$

Algtingimused on $A_0 = 1$, $A_1 = 2$.

Karakteristliku võrrandi $q^2 - 2q - 3 = 0$ lahendid on $q_1 = 3$, $q_2 = -1$. Järelikult rekurrentse võrrandi üldlahend on

$$A_n = c_1 \cdot 3^n + c_2 \cdot (-1)^n.$$

Algtingimuste põhjal saame võrrandisüsteemi

$$\begin{aligned} c_1 + c_2 &= 1 \\ 3c_1 - c_2 &= 2, \end{aligned}$$

mille lahendid on $c_1 = \frac{3}{4}$, $c_2 = \frac{1}{4}$. Algoritmi tööaeg sisendandmete mahu n korral on seega

$$A_n = \frac{3}{4} \cdot 3^n + \frac{1}{4} \cdot (-1)^n = \frac{3^{n+1} + (-1)^n}{4}.$$

Materjal õpikus. Lk 36–40 (teist järku rekurrentsete võrrandite lahendamine).

Ülesanne 3. Teha kindlaks, kas järgmise naabrusmaatriksiga antud suunatud graaf on tugevalt sidus.

$$G = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Lahendus. Joonistades välja selle suunatud graafi, näeme, et graafi tippude hulk jaguneb kaheks alamhulgaks $\{1, 4, 6\}$ ja $\{2, 3, 5\}$ nii, et esimese hulga ühestki tipust ei vii kaart teise hulga ühessegi tippu. Järelikult ei ole võimalik esimese hulga tippudest pääseda teise hulga tippudesse, st graaf ei ole tugevalt sidus.

Materjal õpikus. Lk 79–81 (tugev ja nõrk sidusus). Lk 85, ülesanded 6–11.

Ülesanne 4. Puu tippude astmed on 1, 1, 1, 1, 1, 1, 2, 2, 2, 3, 4 ja x. Leida x.

Lahendus. Puul on 12 tippu, tipuastmete summa on $19 + x$. Teiselt poolt on tipuastmete summa valemi $S = 2(n-1)$ põhjal $2 \cdot (12-1) = 22$. Seega $19 + x = 22$, millest $x = 3$.

Materjal õpikus. Lk 64 (teoreem 2). Lk 74, ülesanded 4–8.

Ülesanne 5. Teha kindlaks, kas järgmine positiivsete täisarvude hulgal määratud relatsioon

$$\mathcal{R} = \{(m, n) : m^2 n = mn^2\}$$

on ekvivalents.

Lahendus. Kontrollime ekvivalentsi omaduste kehtivust.

- Relatsioon on refleksiivne, sest iga positiivse täisarvu x korral kehtib $x^2 x = xx^2$, st $(x, x) \in \mathcal{R}$.

- Relatsioon on sümmeetriline, sest kui $x^2 y = xy^2$, siis ka $y^2 x = yx^2$ (need kaks võrdust on teineteisega samaväärsed), st kui $(x, y) \in \mathcal{R}$, siis ka $(y, x) \in \mathcal{R}$.

- Relatsioon on transitiivne, sest kui $x^2 y = xy^2$ ja $y^2 z = yz^2$, siis nende võrduste korrutamisel saame $x^2 y^3 z = xy^3 z^2$, millest võime järeldada, et $x^2 z = xz^2$, sest y^3 on eelduse kohaselt positiivne täisarv (st nullist erinev). Järelikult on ka transitiivsuse tingimus täidetud: kui $(x, y) \in \mathcal{R}$ ja $(y, z) \in \mathcal{R}$, siis ka $(x, z) \in \mathcal{R}$.

Seega see relatsioon on ekvivalents.

Materjal õpikus. Lk 90–92 (ekvivalentsirelatsioon). Lk 94–95, ülesanded 5–10, 19–24.

Kontrolltöö lahendused

Diskreetsed struktuurid

3. variant

Ülesanne 1. Kirjanduskriitikute kongressil tuleb kritiseerimisele 7 novelli, 7 romaani, 7 luulekogumikku ja 7 naljakogumikku. Selleks, et Toomas saaks kongressil kriitikuna osaleda, peab ta läbi lugema täpselt 10 teost, sealjuures igast žanrist vähemalt 2 teost. Mitmel viisil on Toomasel võimalik seda tingimust täita (raamatute lugemise järjekord pole oluline)?

Lahendus. Kui Toomas loeb ühest liigist 4 teost ja ülejäänutest igaühest 2, siis selle liigi valikuks, millest ta loeb 4 teost, on 4 võimalust ja teoste endi valikuks $\binom{7}{4}$ võimalust. Kolmest ülejäänud liigist on igaühe puhul kahe teose valimiseks $\binom{7}{2}$ võimalust. Et kõigil nendel valikutel on võimaluste arvud üksteisest sõltumatud, siis korrutamisreegli põhjal saab sel juhul teoseid valida $4 \cdot \binom{7}{4} \cdot \binom{7}{2}^3 = 1296540$ viisil.

Kui Toomas loeb kahest liigist kummastki 3 teost ja ülejäänud kahest liigist kummasti 2 teost, siis nende liikide valikuks, millest ta loeb 3 teost, on $\binom{4}{2}$ võimalust. Teoste endi valikuks on 3 valitava teosega liikide puhul $\binom{7}{3}$ võimalust, 2 valitava teosega liikide puhul aga $\binom{7}{2}$ võimalust. Siin on võimalusi seega $\binom{4}{2} \cdot \binom{7}{3}^2 \cdot \binom{7}{2}^2 = 3241350$.

Sellega on kõik teoste valikuviisid ammendatud, võimalusi on liitmisreegli põhjal kokku $1296540 + 3241350 = 4537890$.

Materjal õpikus. Lk 14 (kombinatsioonid). Lk 19 (korrutamis- ja liitmisreegel). Lk 22, ülesanded 21–23. Lk 21, ülesanne 15.

Ülesanne 2. Kevadine õhutemperatuur muutub nii, et kahe järjestikuse päeva temperatuuride aritmeetiline keskmine võrdub alati neile vahetult eelneva päeva temperatuuriga. Vaatlusperioodi esimesel päeval on temperatuur 0 kraadi ja teisel päeval 1 kraad. Leida avaldis, millest on võimalik ainult naturaalarvu n järgi välja arvutada, milline on õhutemperatuur n-ndal päeval.

Lahendus. Olgu A_n õhutemperatuur n-ndal päeval. Ülesande tingimuste põhjal kehtib seos $\frac{1}{2}(A_n + A_{n-1}) = A_{n-2}$, millest

$$A_n = -A_{n-1} + 2A_{n-2}.$$

Algtingimused on $A_1 = 0$, $A_2 = 1$.

Karakteristliku võrrandi $q^2 + q - 2 = 0$ lahendid on $q_1 = -2$, $q_2 = 1$. Järelikult rekurrentse võrrandi üldlahend on

$$A_n = c_1 \cdot (-2)^n + c_2.$$

Algtingimuste põhjal saame võrrandisüsteemi

$$\begin{aligned} -2c_1 + c_2 &= 0 \\ 4c_1 + c_2 &= 1, \end{aligned}$$

mille lahendid on $c_1 = \frac{1}{6}$, $c_2 = \frac{1}{3}$. Õhutemperatuur n-ndal päeval on seega

$$A_n = \frac{1}{6} \cdot (-2)^n + \frac{1}{3} = \frac{1 - (-2)^{n-1}}{3}.$$

Materjal õpikus. Lk 36–40 (teist järku rekurrentsete võrrandite lahendamine).

Ülesanne 3. Leida, mitu erinevat (isomorfismi täpsuseni) aluspuud on järgmise naabrusmaatriksiga antud graafil.

$$G = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Lahendus. Joonistades välja selle graafi, näeme, et ta koosneb tsüklist 1, 4, 2, 5, 6, mille külge tipus 5 kinnitub rippuv tipp 3. Selle graafi aluspuu saame parajasti siis, kui jätame tsüklist ühe serva ära. Põhimõtteliselt erinevaid viise selle serva ärajätmiseks on 3: jätta ära kas serv 56, serv 61 või serv 14. Ülejäänud servade 42 ja 25 ärajätmine annab vaadeldutega isomorfsed aluspuud (42 ärajätmine on samaväärne 61 ärajätmisega ja 25 ärajätmine 56 ärajätmisega).

Materjal õpikus. Lk 71 (graafi aluspuu), lk 65 (tsüklomaatiline arv), lk 66–67 (teoreemid 3 ja 4).

Ülesanne 4. Puu tippudest k tippu on astmega 4, ülejäänud tipud on lehed. Leida puu tippude arv.

Lahendus. Olgu x selle puu lehtede arv, tippude koguarv on siis $k + x$. Ühelt poolt on puu tipuastmete summa $4k + x$, teiselt poolt aga valemi $S = 2(n - 1)$ põhjal $2(k + x - 1)$. Järelikult $4k + x = 2(k + x - 1)$, millest $x = 2k + 2$ ning puu tippude arv on $k + x = 3k + 2$.

Materjal õpikus. Lk 64 (teoreem 2). Lk 74, ülesanded 4–8.

Ülesanne 5. Teha kindlaks, kas järgmine reaalarvude hulgal määratud relatsioon

$$\mathcal{R} = \{(x, y) : x \leqslant |y|\}$$

on mitterange järjestus.

Lahendus. Relatsioon ei ole mitterange järjestus, sest ta ei rahulda antisümmeetrilisuse omadust: näiteks $(3, -3) \in \mathcal{R}$ ja $(-3, 3) \in \mathcal{R}$ (st $3 \leqslant |-3|$ ja $-3 \leqslant |3|$), aga $3 \neq -3$.

Materjal õpikus. Lk 92–93 (mitterange ja range järjestus). Lk 94–95, ülesanded 5–10.